**Il est demandé aux candidats de souligner les résultats obtenus. La précision, la concision, la rédaction et la présentation des démonstrations seront des éléments essentiels d'appréciation. Aucun raisonnement incomplet ne sera pris en considération. Tout manque de rigueur sera sanctionné.**

Dans tout le problème, $R$ désigne le corps des nombres réels et $N$ l'ensemble des entiers naturels. On note $R^n$, l'ensemble des vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ à coordonnées réelles.

Pour $x$ et $y$ dans $R^n$, $x \cdot y$ désigne le produit scalaire canonique de $x$ et de $y$, c'est-à-dire que l'on a $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. De même, $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de $x$, c'est-à-dire que l'on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

On note $\mathcal{M}_n(R)$, l'ensemble des matrices carrées de dimension $n$ à coefficients réels.

Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(R)$ est dite bistochastique si, pour tout couple $(i,j)$ d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on a $a_{i,j} \geq 0$, $\sum_{h=1}^{n} a_{i,h} = \sum_{h=1}^{n} a_{h,j} = 1$.

On note $\mathcal{B}_n$, l'ensemble des matrices bistochastiques de dimension $n$.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(R)$ est dite de permutation si elle est bistochastique et si tous ses coefficients sont égaux à zéro ou un.

Pour tout couple de réels $(i,j)$, on note $\delta_{i,j}$ la quantité égale à 1 si $i = j$ et 0 sinon. Par ailleurs, on note $e$ le vecteur de $R^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

**La partie II est indépendante de la partie I et la partie IV des parties II et III.**

## I Préliminaires

1) Montrer que si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de permutation de $\mathcal{M}_n(R)$, alors il existe une permutation $\sigma$ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que pour tout couple $(i,j)$ d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$ on a $a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}$.

2) Montrer que si $A$ est une matrice de permutation alors $A$ a un déterminant égal à 1 ou à $-1$. Déterminer l'inverse de $A$.

3) Montrer que le produit de deux matrices bistochastiques est une matrice bistochastique.

4) Montrer que si $A$ est une matrice bistochastique et $a$ un vecteur ligne de $A$ alors $\|a\| \leq 1$ et que l'égalité n'est obtenue que si $a$ est un vecteur de la base canonique de $R^n$.

5) En déduire que les seules matrices bistochastiques d'inverse bistochastique sont les matrices de permutation.

## II Polyèdres convexes

Un demi-espace de $R^n$ est un sous-ensemble $H$ pour lequel il existe $x \in R^n$ et $\alpha \in R$ tels que $H = \{y \in R^n : x \cdot y \leq \alpha\}$.

Pour $m$ entier, soit $\mathcal{S}_m = \{\lambda \in R^m : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \text{ et } \lambda_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$. On rappelle que $K \subset R^n$ est dit convexe si pour tout $m$, tout $\lambda \in \mathcal{S}_m$ et toute famille $(x^i)_{i=1,\ldots,m}$ d'éléments de $K$ on a $\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i \in K$. Par ailleurs, si $L$ est un sous-ensemble de $R^n$, on appelle enveloppe convexe notée $co(L)$, l'intersection de tous les ensembles convexes contenant $L$ et on a $co(L) = \{x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i : m \in N, (x^i) \in L^m \text{ et } \lambda \in \mathcal{S}_m\}$.

On dit qu'un sous-ensemble $K$ de $R^n$ est un polyèdre convexe si $K$ est borné et si $K$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces.

On appelle dimension d'un polyèdre convexe la dimension de l'espace affine qu'il engendre.

On dit que $x$ est un sommet du polyèdre convexe $K$ si $x \in K$ et si pour tout couple $(y, z)$ d'éléments de $K$ et tout $\lambda \in ]0, 1[$, $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ entraîne $y = z = x$.

1) Montrer que $\mathcal{S}_n$ est un polyèdre convexe de $R^n$. Déterminer sa dimension et ses sommets.

2) Soit $K$ un polyèdre convexe de $R^n$ et soit $H$ un hyperplan de $R^n$ avec $H = \{y \in R^n :$

$x \cdot y = \alpha\}$ où $x$ est donné dans $R^n$ et $\alpha$ dans $R$. On suppose que $H \cap K \neq \emptyset$ et que $K \cap \{y \in R^n : x \cdot y > \alpha\} = \emptyset$. Un tel $H$ est appelé hyperplan d'appui de $K$. Montrer que l'ensemble des sommets de $H \cap K$ est égal à l'ensemble des sommets de $K$ intersecté avec $H$.

3) Soit $k$ un point de la frontière de $K$, polyèdre convexe, montrer qu'il existe un hyperplan d'appui de $K$ contenant $k$.

4) Montrer que $K$, polyèdre convexe, est égal à l'enveloppe convexe de sa frontière.

5) En déduire, par récurrence sur $n$, que tout polyèdre convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

## III L'ensemble $\mathcal{B}_n$ des matrices bistochastiques de dimension $n$

1) Montrer que $\mathcal{B}_n$ est un polyèdre convexe de dimension au plus $(n-1)^2$.

2) Montrer, par récurrence sur $n$, que l'ensemble des sommets de $\mathcal{B}_n$ est égal à l'ensemble des matrices de permutation. (On pourra commencer par montrer que si $S = (s_{i,j})$ est un sommet de $\mathcal{B}_n$ alors il existe un couple $(i,j)$ d'éléments de $\{1,\ldots,n\}$ tel que pour tout $k$ de $\{1,\ldots,n\}$ on a $s_{i,k} = \delta_{k,j}$ et $s_{k,j} = \delta_{i,k}$.)

3) Soit $d$ un entier. Montrer que si $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$ avec $(x, x^1, \ldots, x^m) \in (R^d)^{m+1}$ et $\lambda \in \mathcal{S}_m$, alors il existe $\mu \in \mathcal{S}_{d+1}$ et $(y^i)_{i=1,\ldots,d+1} \in (R^d)^{d+1}$ avec $\{y^1,\ldots,y^{d+1}\} \subset \{x^1,\ldots,x^m\}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i y^i$.

4) En déduire que toute matrice $A$ de $\mathcal{B}_n$ se décompose sous la forme $\sum_{i=1}^m \lambda_i A_i$ avec $\lambda \in \mathcal{S}_m$, $m \leq (n-1)^2 + 1$ et où les $A_i$ sont des matrices de permutation.

## IV Orbite d'un vecteur $x$ de $R^n$

1) Soit $x \in R^n$ et deux entiers $i$ et $j$ de $\{1,\ldots,n\}$ tels que $x_1 \leq \ldots \leq x_i \leq \ldots \leq x_j \leq \ldots x_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $y \in R^n$ tels que $y_i = x_i + \varepsilon \leq x_j$, $y_j = x_j - \varepsilon \geq x_i$ et $y_k = x_k$ pour tout $k$ différent de $i$ et de $j$. Montrer qu'il existe $A_\varepsilon^{i,j} \in \mathcal{B}_n$ telle que $y = A_\varepsilon^{i,j} x$.

2) On rappelle qu'une fonction $\varphi$ de $R$ dans $R$ est dite convexe si pour tout entier $m$, tout $t$ dans $R^m$ et tout $\lambda$ dans $\mathcal{S}_m$ on a $\varphi(\sum_{i=1}^m \lambda_i t_i) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi(t_i)$. Soient $x$ et $y$ dans $R^n$ et $A \in \mathcal{B}_n$ tels que $y = Ax$, montrer que pour toute fonction convexe $\varphi$ on a $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \geq \sum_{i=1}^n \varphi(y_i)$.

3) Supposons, à présent, que $x$ et $y$ sont deux vecteurs de $R^n$ tels que $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ et $y_1 \leq \ldots \leq y_n$ et tels que pour toute fonction convexe $\varphi$ on a $\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \geq \sum_{i=1}^n \varphi(y_i)$. Montrer que l'on a alors, pour tout $k < n$, $x_1 + \ldots + x_k \leq y_1 + \ldots + y_k$ et $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$. Lorsque deux vecteurs $x$ et $y$ vérifient ces dernières relations on dit que $y$ domine $x$.

4) Soient $x$ et $y$ deux vecteurs de $R^n$ tels que $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ et $y_1 \leq \ldots \leq y_n$. L'objet de cette question est de démontrer, par récurrence sur $n$, la propriété $(P)$ suivante :

$(P)$ Si $y$ domine $x$ alors il existe $A \in \mathcal{B}_n$ telle que $y = Ax$.

On notera $a = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.

a) Vérifier la propriété $(P)$ pour $n = 1$ ainsi que dans le cas général si $x_1 = a$ ou $x_n = a$.

b) On suppose, à présent, que $x_1 < a < x_n$ et que la propriété $(P)$ est démontrée pour tout entier strictement plus petit que $n$. Montrer que s'il existe $k < n$ tel que $x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_k$ alors il existe $A_k \in \mathcal{B}_k$ et $A_{n-k} \in \mathcal{B}_{n-k}$ tels que $y^{(k)} = A_k x^{(k)}$ et $y^{(n-k)} = A_{n-k} x^{(n-k)}$ où $x^{(k)}$ désigne le vecteur $(x_1, \ldots, x_k)$ et $x^{(n-k)}$ le vecteur $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (idem pour $y$). Conclure dans ce cas.

c) On suppose à présent que toutes les inégalités sont strictes (c'est à dire que $x_1 + \ldots + x_k < y_1 + \ldots + y_k$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ et $x_1 < a < x_n$). Soit $i$ l'indice de la plus grande coordonnée de $x$ inférieure strictement à $a$ et $j$ l'indice de la plus petite coordonnée de $x$ strictement supérieure à $a$. Soit $\bar{\varepsilon}$ le plus grand réel tel que $A^{i,j}_{\bar{\varepsilon}} x$ est dominé par $y$. Montrer que la propriété $(P)$ est vraie si $\bar{\varepsilon} \leq min\{(a - x_i), (x_j - a)\}$ (on remarquera que, dans ce cas, $A^{i,j}_{\bar{\varepsilon}} x$ sature au moins l'une des inégalités).

d) Dans le cas contraire (c'est à dire si $\bar{\varepsilon} > min\{(a - x_i), (x_j - a)\}$), montrer qu'il suffit alors de vérifier la propriété $(P)$ pour un vecteur $x'$ bien choisi ayant strictement plus de coordonnées égales à $a$ que $x$. Conclure.

5) On note $\mathcal{I}_k$ l'ensemble des sous ensembles $I$ de $\{1, \ldots, n\}$ à $k$ éléments. Soient $x$ et $y$ dans $R^n$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{B}_n$ telle que $y = Ax$ est $min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} x_i \leq min_{I \in \mathcal{I}_k} \sum_{i \in I} y_i$ et $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$.